



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Wykład 5

Zasady oceny bezpieczeństwa konstrukcji

Zjawiska towarzyszące trwałym odkształceniom plastycznym

Hipoteza Coulomba - Treski

Naprężenia zredukowane

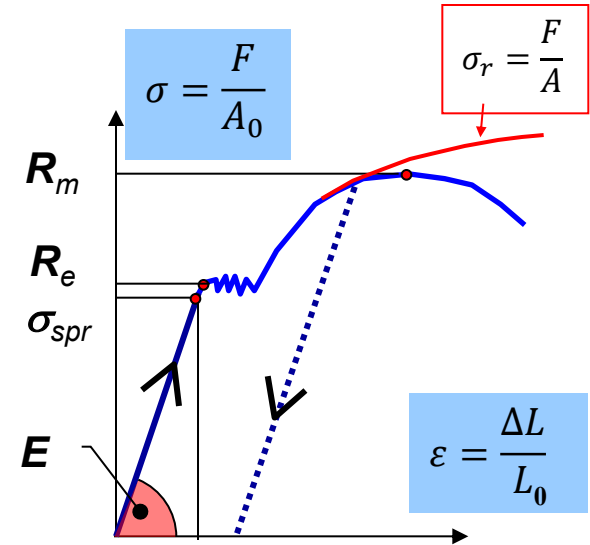
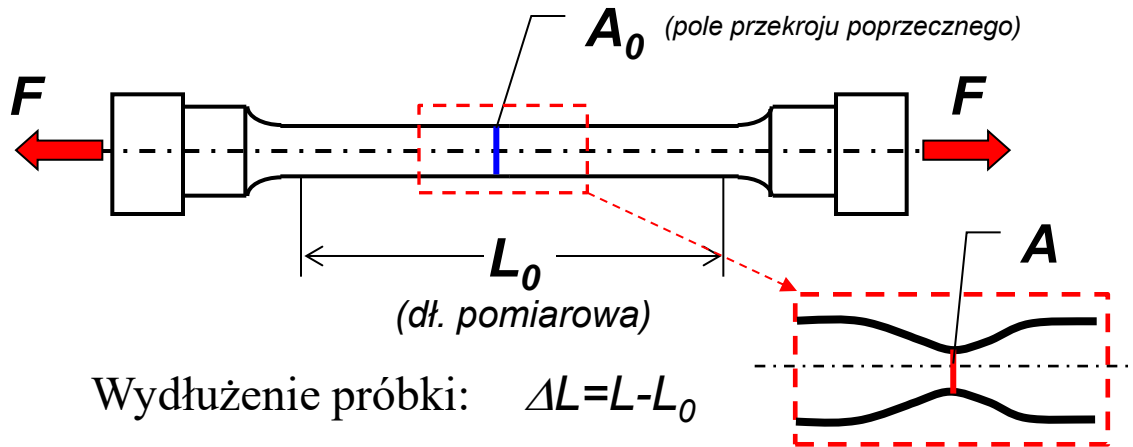
Hipoteza Hubera-Misesa- Hencky

Modele materiału

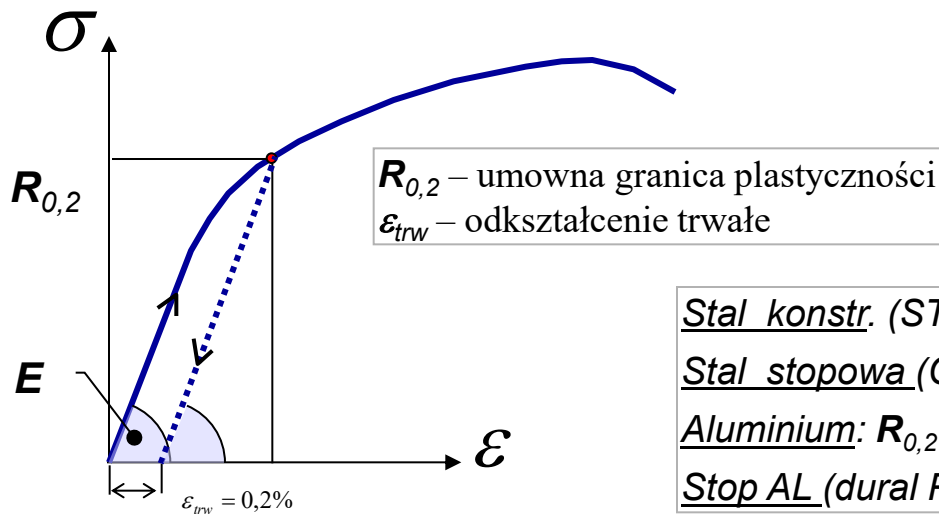
Zniszczenie materiału

Statyczna próba rozciągania

Próba rozciągania próbki wykonanej z materiału o wyraźnej granicy plastyczności:



Dla materiału bez wyraźnej granicy plastyczności:



E – moduł Younga
 σ_{spr} – granica sprężystości
 R_e – granica plastyczności
 R_m – granica wytrzymałości doraźnej

σ_r – naprężenia rzeczywiste
 A – rzeczywiste pole przekroju poprzecznego

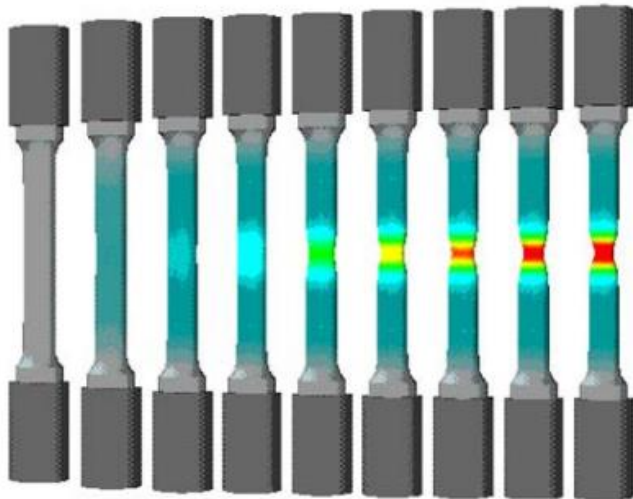
Stal konstr. (ST3S) : $R_e = 200$ MPa $R_m = 450$ MPa

Stal stopowa (Cr-Ni-Mo): $R_e = 870$ MPa $R_m = 1020$ MPa

Aluminium: $R_{0,2} = 120$ MPa $R_m = 140$ MPa

Stop AL (dural PA9): $R_{0,2} = 490$ $R_m = 570$ MPa

Rodzaje próbek i typy przelomów



0,0

0,7

Narastanie odkształceń plastycznych w „szyjce”



Przykłady przelomów próbek po próbach rozciągania

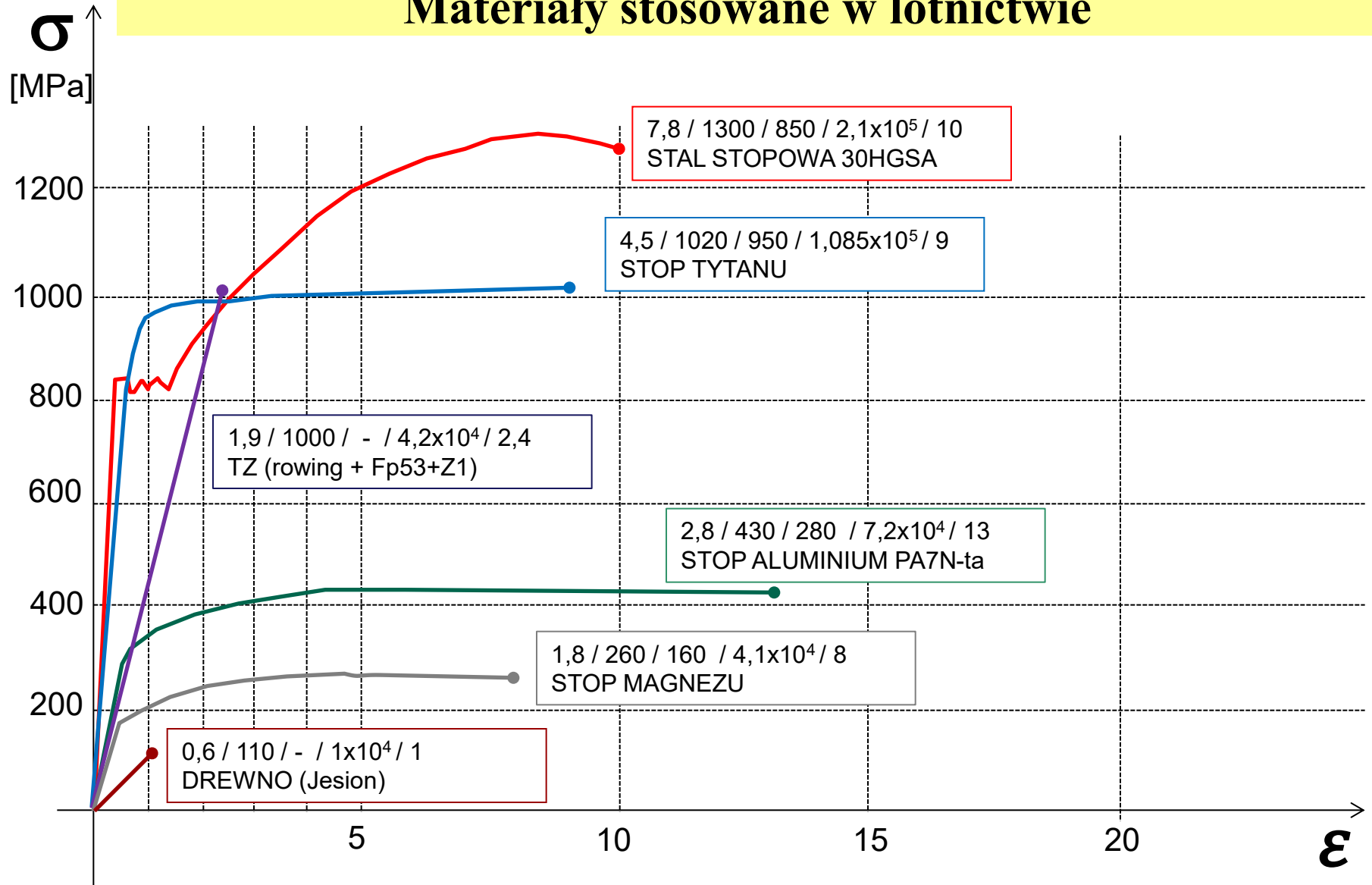
- a) przelom rozdzielczy kruchy,
- b) przelom rozdzielczy wiązki
- c) przelomy rozdzielczy wiązki i poślizgowy
- d) przelom poślizgowy

Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe metali

Tablica 15.2. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe metali w temperaturach obniżonych

Materiał (nazwa, gatunek)	Przybliżone oznaczenie wg PN	Skład chemiczny (orientacyjny)	Stan	Wytrzymałość na roz- ciąganie R_m (R_r), MPa			Granica plastyczności R_e (Q_r), MPa			Liczba cykli	Wytrzymałość zmęczeniowa, MPa			
				w temperaturach, °C			w temperaturach, °C				rodzaj wytrzymałości zmęczeniowej	w temperaturach, °C		
				+20	-78	-190	+20	-78	-190			+20	-78	-190
Stal węglowa	St3	0,2 C	surowy	450	570	900	280	460	850	10^7	Z_{ro}	130	165	320
	St5	0,3 C	surowy	580	800		320	670		10^7	Z_{ro}	180	230	550
Stal kon- strukcyjna wyzszej jakości	08X	0,08 C; 0,59 Mn	normalizowany	410	500	780	280	370		10^6	Z_{ro}	200	270	560
	40	0,40 C; 0,78 Mn; 0,43 Si	wyżarzony	600	720	920	340	480		10^6	Z_{ro}	230	320	630
	65	0,64 C; 0,75 Mn	normalizowany	775	870	980	400	450	970	10^6	Z_{ro}	270	370	670
Stale kon- strukcyjne stopowe do nawęglania	Cr-Mo	0,22 C; 0,60 Mn 0,83 Cr, 0,22 Mo	hartowane i odpuszczane	940	1050	1320	830	960	1250	10^6	Z_{ro}	480	550	730
	Cr-Ni-Mo	0,34 C; 0,45 Mn; 2,27 Ni, 1,88 Cr, 0,4 Mo	hartowane i odpuszczane	1020	1150	1400	870	980	1240	10^6	Z_{ro}	550	610	780
Stale nierdzewne	Cr-Ni	18,5 Cr, 8,82 Ni	walcowane na zimno	1450	1650	2000	1000	1350		10^6	Z_{go}	760	860	1050
	Cr-Ni	17,0 Cr, 6,5 Ni 0,37 Ti, 0,12 Al	wyżarzony	1250	1380	1650	1200	1350		10^6	Z_{go}	650	850	1100
Aluminium	Al	0,99 Al	półtwardy	140	150	200	120	120		10^6	Z_{go}	90	105	
Stop Al	Pa28	3,8+4,4 Cu		480	520	600	330	340	470	10^6	Z_{go}	230	260	370
Dural	PA9	5,7 Zn; 2,8 Mg; 1,5 Cu		570	600	690	490	510	610	10^6	Z_{go}	230	260	410
Braz aluminiowy	BA94A	9,0 Al		540	570	660	340	370		10^6	Z_{go}	270	340	420

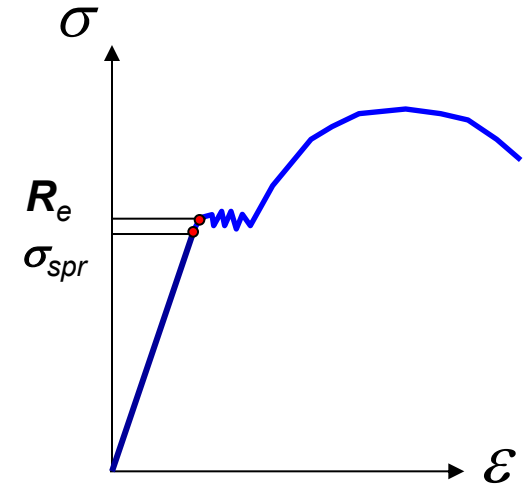
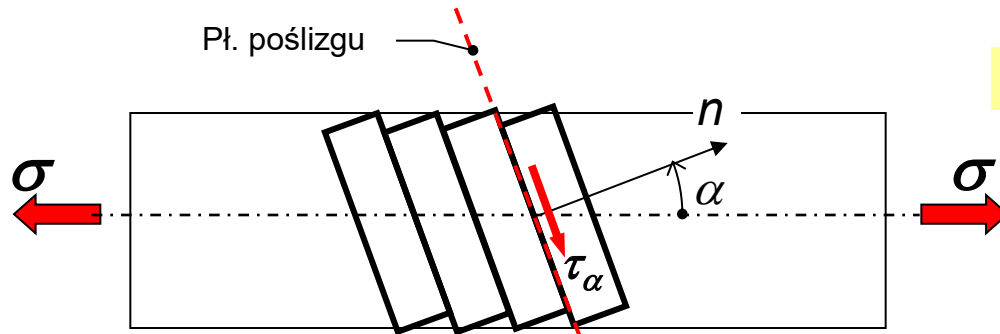
Materiały stosowane w lotnictwie



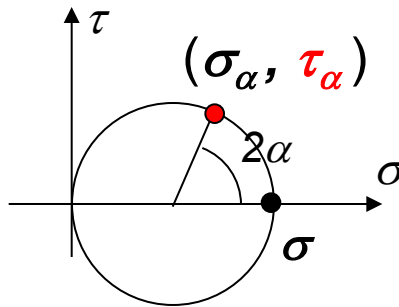
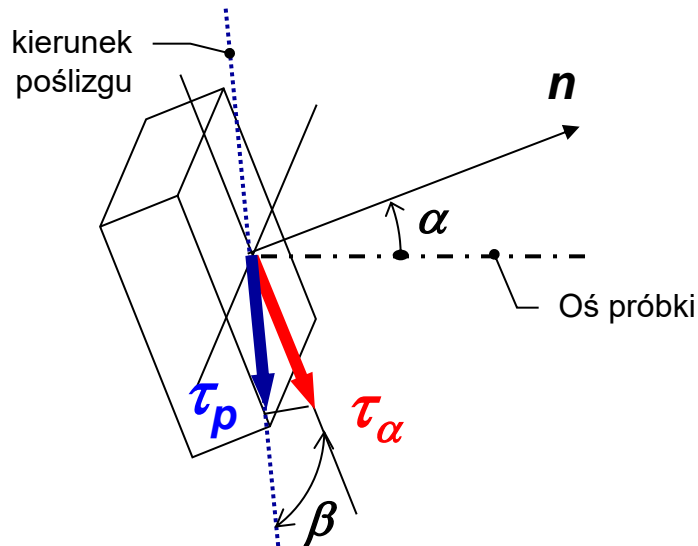
ρ	R_m	R_e	E	A_5
g/cm ³	MPa	MPa	MPa	%

Zjawiska towarzyszące trwałym odkształceniom plastycznym

Płynięciu materiału towarzyszy zjawisko poślizgu



Próbka z monokryształu



Poślizg nastąpi, gdy:

$\tau_p = \tau_0$ – krytyczna wartość ścinania

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \cdot \sin 2\alpha = \sigma \cdot \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tau_p = \sigma \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta = \tau_0$$

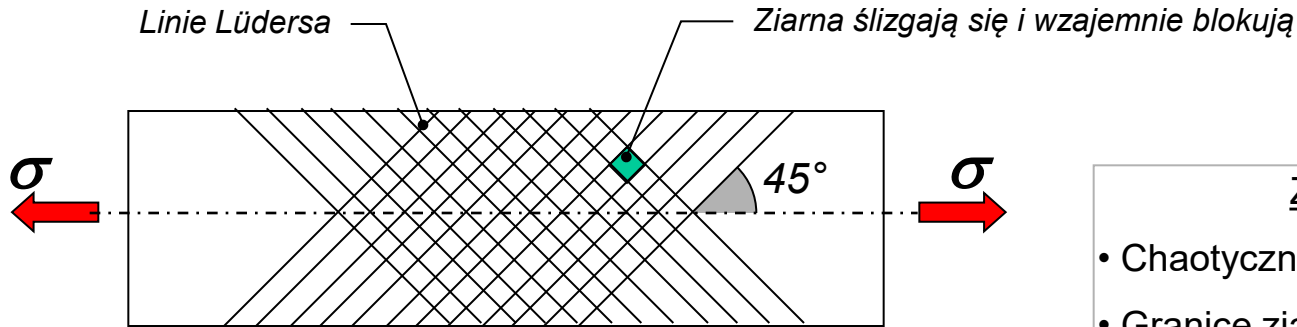
Prawo
Schmida

α, β - stałe względem siatki monokryształu,
ale różne wzgl. osi próbki

Wniosek: Pojawienie się w monokryształe trwałych odkształceń zależy wyłącznie od wartości τ_p

Hipoteza Coulomba - Treski

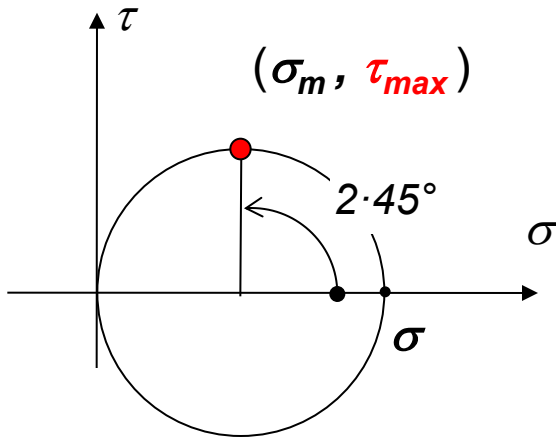
W materiale polikrystalicznym (*metale stosowane w technice*)



Próbka z miękkiej stali o wyraźnej granicy plastyczności

ZJAWISKA:

- Chaotyczne ustawienie ziaren
- Granice ziaren blokują proces poślizgu
- Poślizgi – odkształcenia niejednorodne
- Kolejne ziarna ulegają uplastycznieniu (*poddają się poślizgom*)



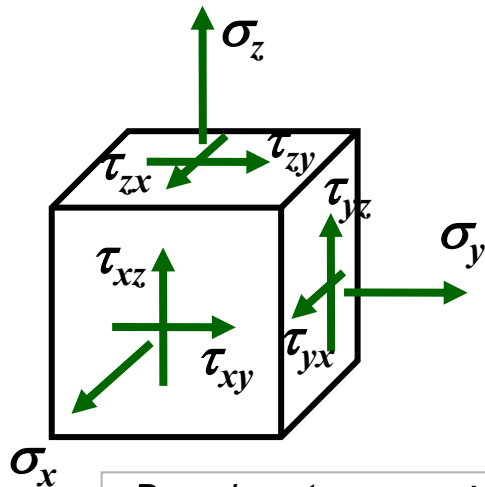
Całe odkształcenie powstaje na skutek poślizgu !

Hipoteza τ_{max} (Coulomba-Treski):

Wartość τ_{max} stanowi miarę niebezpieczeństwa jaką przedstawia dany stan naprężenia z uwagi na pojawienie się pierwszych makroskopowych trwałych odkształceń

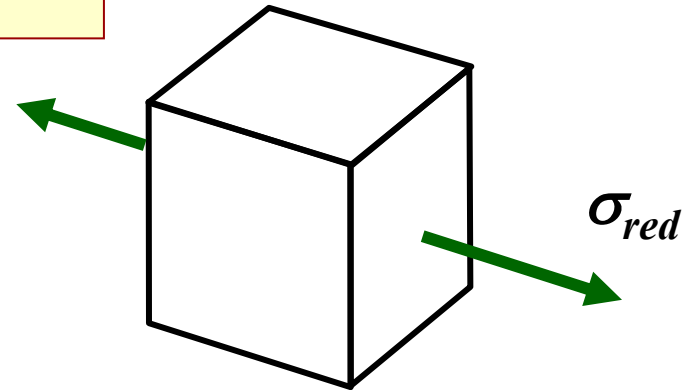
Naprężenia zredukowane

Naprężenia zredukowane, to zastępczy stan jednowymiarowy rozciągania, który pod względem bezpieczeństwa odpowiada stanowi analizowanemu

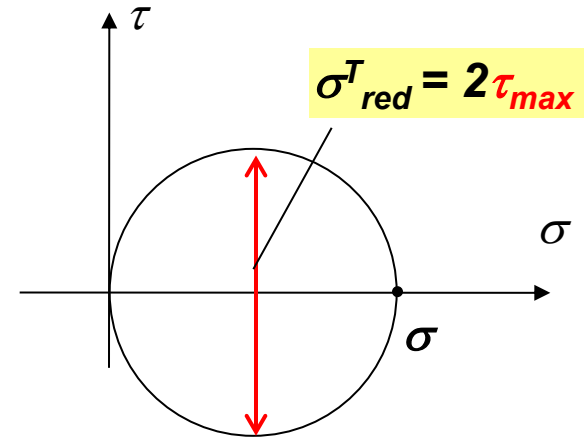
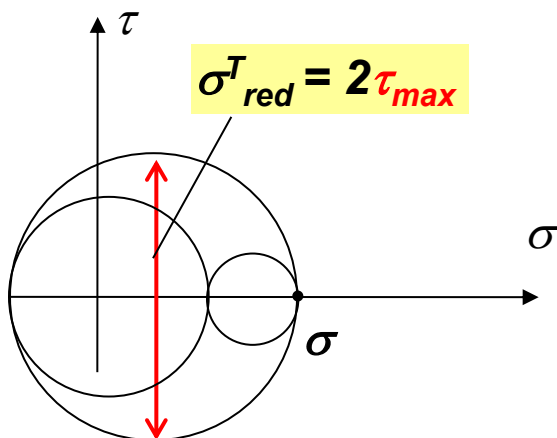


Dowolny stan naprężenia

$$\sigma_{red}^T = 2 \cdot \tau_{max}$$



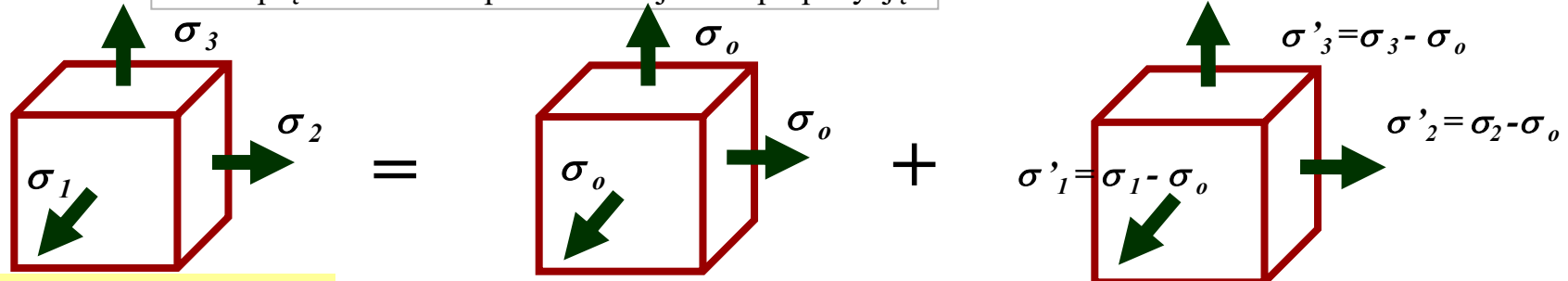
Równoważny (pod względem bezpieczeństwa) stan rozciągania



Jeśli τ_{max} jest takie samo, to stany są takie same pod względem bezpieczeństwa

Hipoteza Hubera-Misesa- Hencky

Stan naprężenia można przedstawić jako superpozycję:

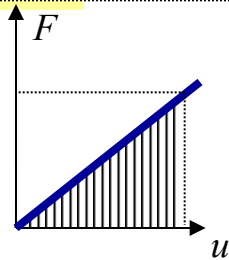
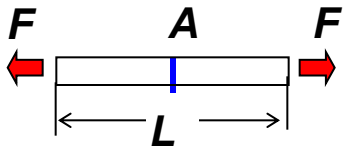


$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Tensor kulisty (zmiana obj.)

Dewiator (odksz. postaciowe)

Energia sprężysta rozciągania:



$$U = \frac{1}{2} F \cdot u = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{u}{L} A \cdot L = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot V$$

$$U' = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon$$

Gęstość energii (energia właściwa)

Gęstość energii odkształcenia postaciowego dla stanu trójwymiarowego (energia właściwa)

$$U' = \frac{1}{2} \cdot (\sigma'_1 \cdot \varepsilon'_1 + \sigma'_2 \cdot \varepsilon'_2 + \sigma'_3 \cdot \varepsilon'_3)$$

$$\varepsilon'_1 = \frac{1}{E}(\sigma'_1 - \nu(\sigma'_2 + \sigma'_3))$$

$$\varepsilon'_2 = \frac{1}{E}(\sigma'_2 - \nu(\sigma'_3 + \sigma'_1))$$

$$\varepsilon'_3 = \frac{1}{E}(\sigma'_3 - \nu(\sigma'_1 + \sigma'_2))$$



Prof. Maksymilian Tytus Huber

(ur. 1872 w Krościenku nad Dunajcem - zm. 1950 w Krakowie)
profesor politechnik we Lwowie (1904-1927),

Warszawie (1927-1945),

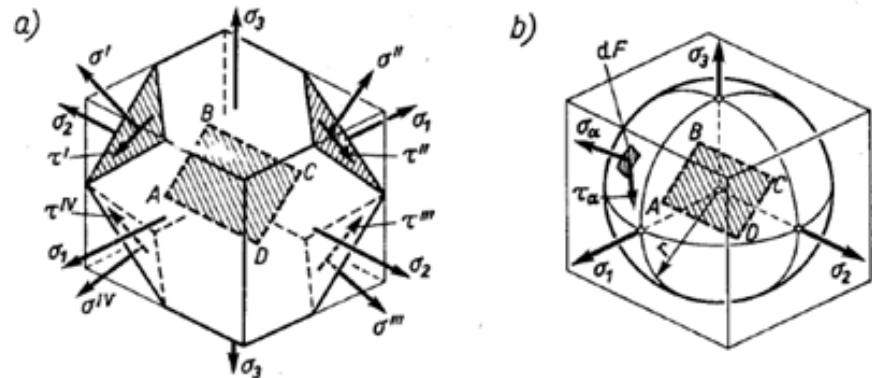
Gdańsku (1946-1949) i Krakowie (1949-1950)

'Zważywszy, że odkształcenie objętościowe przy ściskaniu nie wpływa na niebezpieczeństwo pęknięcia, można z wielkim prawdopodobieństwem uważać energię postaciową za miarę wyężenia materiału' - 1904

M.T.Huber, Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału, Czasopismo Techniczne, Lwów 1904

Miarą współdziałania wszystkich naprężeń jest *średnie efektywne naprężenie*

$$\tau_{ef} = \sqrt{\frac{1}{F} \int \tau_x^2 dF} \quad (a)$$



Rys. 8.5. Określenie efektywnego naprężenia stycznego τ_e

τ_{ef} od wartości naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ w następujący sposób:

$$\tau_{ef} = \sqrt{\frac{1}{15} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (8.1)$$

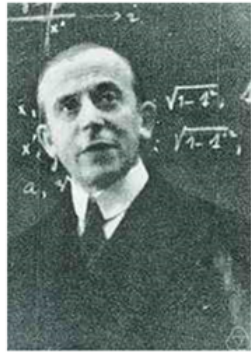
gdy zaś stan naprężenia określa sześć składowych (rys. 7.10), wówczas

$$\tau_{ef} = \sqrt{\frac{1}{15} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}. \quad (8.2)$$

Można dowieść, że wartość τ_{ef} jest niezmiennikiem stanu naprężenia, a więc nie zależy od tego, czy ten stan podany jest przez naprężenia główne, czy też w postaci ogólnej.

Przy poczynionych założeniach naprężenie τ_{ef} stanowi miarę niebezpieczeństwa, jakie przedstawia dany stan naprężenia z uwagi na pojawienie się pierwszych makroskopowych trwałych odkształceń i to jest właśnie istotą hipotezy Hubera.⁽³⁾

Hipoteza Hubera-Misesa- Hencky



Niezmienniki dewiatora stanu naprężenia:

$$I'_1 = 0$$

$$I'_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2$$

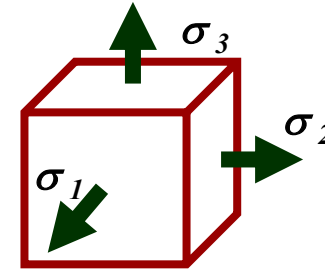
$$I'_3 = (\sigma_1 - \sigma_0) (\sigma_2 - \sigma_0) (\sigma_3 - \sigma_0)$$

Uplastycznienie nie zależy od odkształceń czysto objętościowych.

Warunek plastyczności $F_p(I'_1, I'_2, I'_3) = 0$

Richard von Mises - o uplastycznieniu decyduje I'_2 (1913)

Richard von Mises (ur.1883 we Lwowie, zm. 1953 w Bostonie, USA)

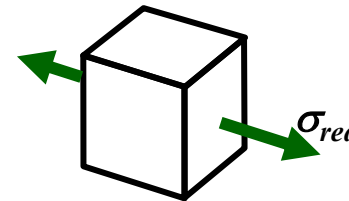


Gęstość energii odkształcenia postaciowego dla stanu trójwymiarowego (energia właściwa)

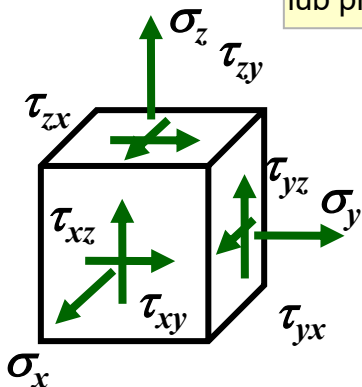
$$U' = \frac{1 + \nu}{3E} \cdot \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right\}$$

Gęstość energii dla stanu jednowymiarowego rozciągania

$$U' = \frac{1 + \nu}{3E} \cdot \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_{red})^2 + (\sigma_{red})^2] \right\} = \frac{1 + \nu}{3E} \cdot \sigma_{red}^2$$



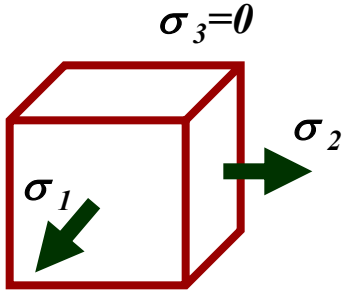
Uplastycznienie nastąpi, gdy gęstość energii odkształcenia postaciowego (na jednostkę objętości) jest równa lub przekroczy gęstość energii, dla której ten sam materiał uplastycznia się w prostej próbie rozciągania.



$$\sigma_{red}^{MH} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\sigma_{red}^{MH} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

Powierzchnia plastyczności



Dla płaskiego stanu naprężenia (PSN)

Materiał osiągnie pierwsze uplastycznienie gdy $\sigma_{red} = R_e$

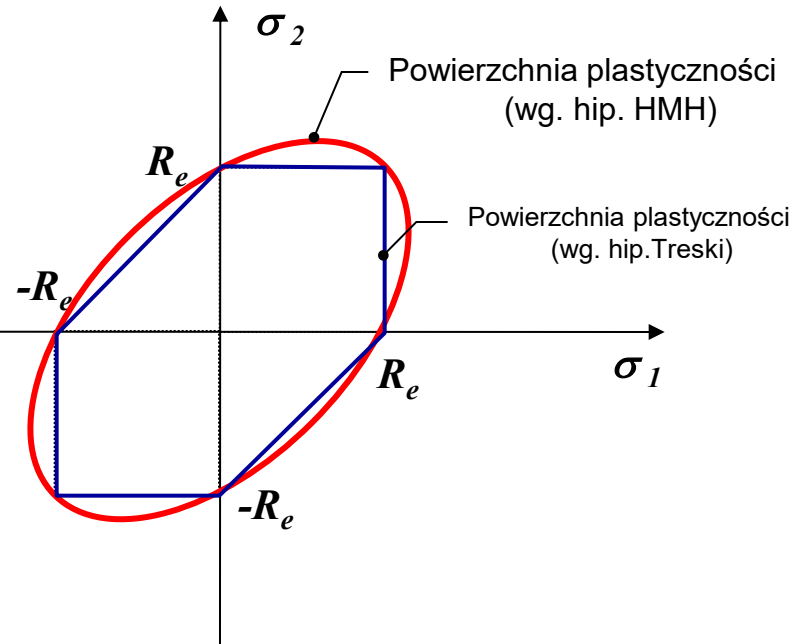
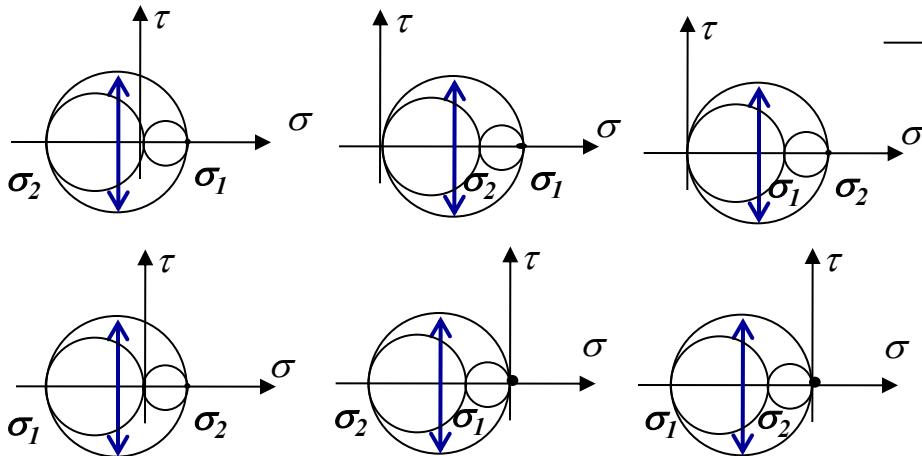
Według hipotezy HMH

$$(\sigma_{red}^{HMH})^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = R_e^2$$



$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = R_e^2$$

Według hipotezy τ_{max}



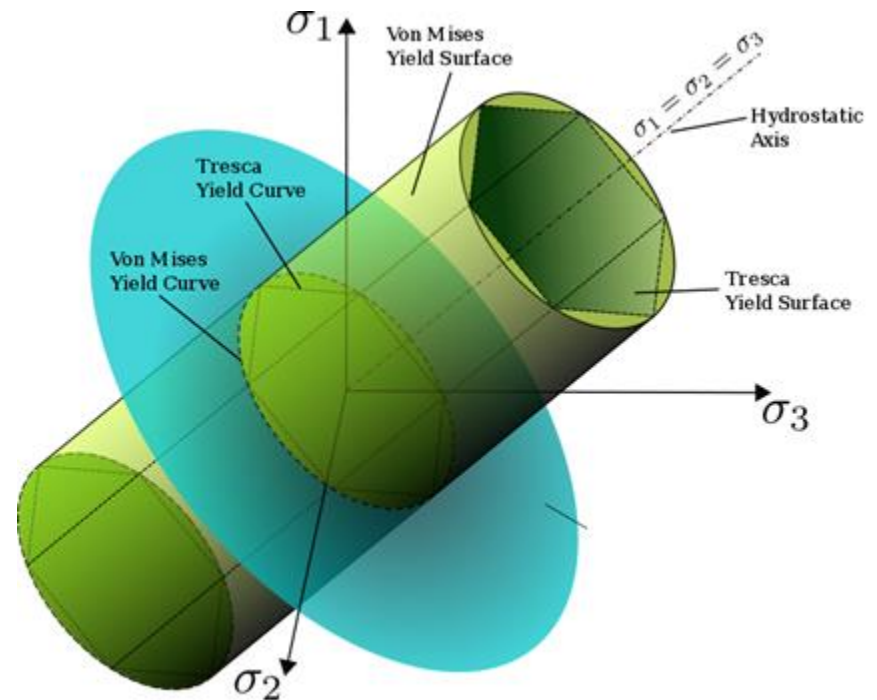
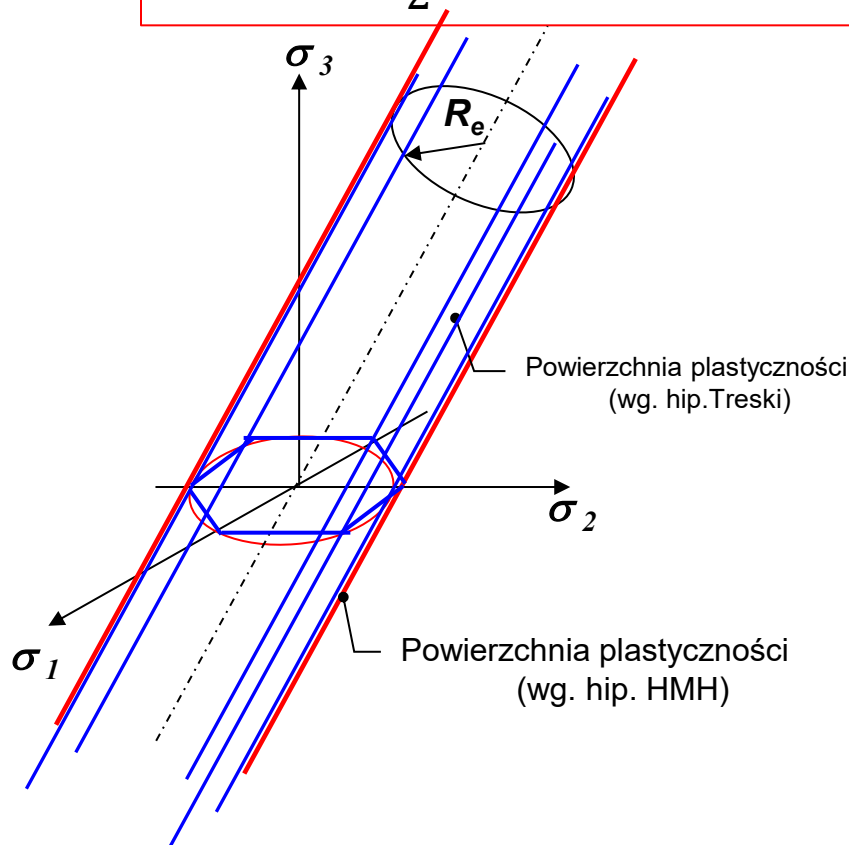
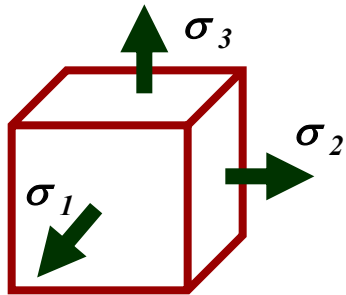
Powierzchnia plastyczności

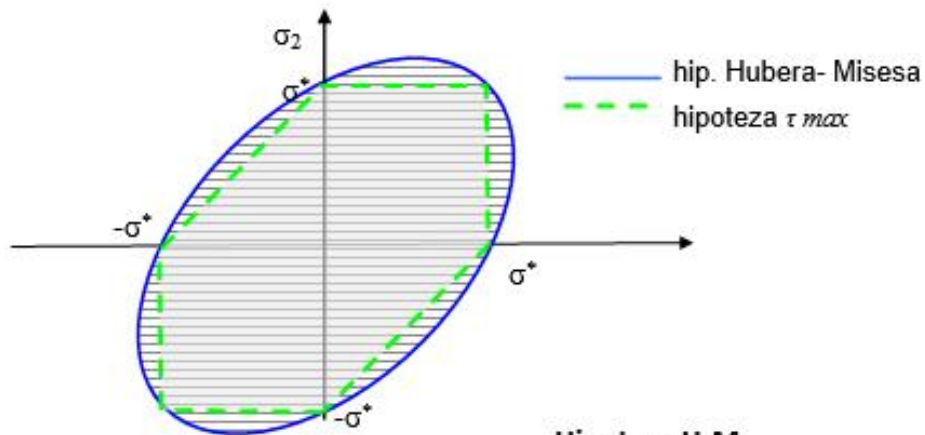
Dla trójwymiarowego stanu naprężenia (3D)

Materiał osiągnie pierwsze uplastycznienie gdy $\sigma_{red} = R_e$

Według hipotezy HMM

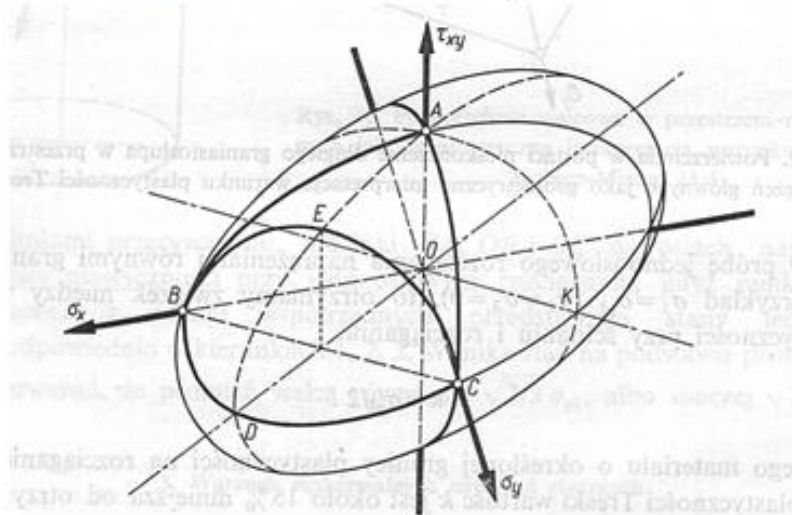
$$(\sigma_{red}^{HMM})^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = R_e^2$$



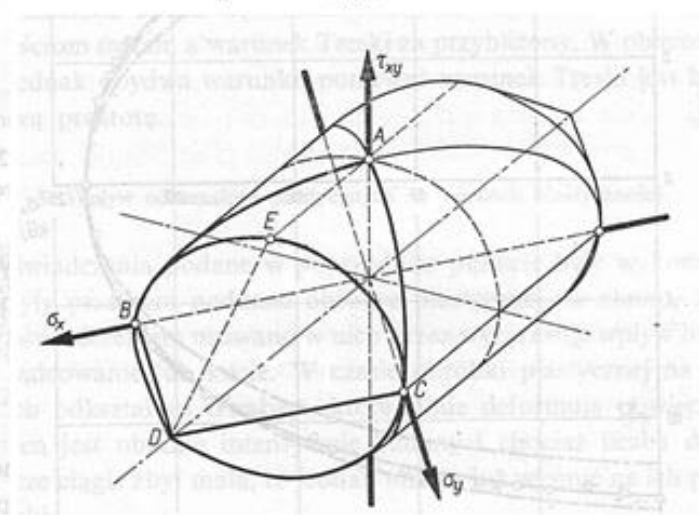


**Porównanie hipotez
wyłężeniowych dla materiałów
izotropowych w układzie
naprężeń głównych
(płaski stan naprężenia)**

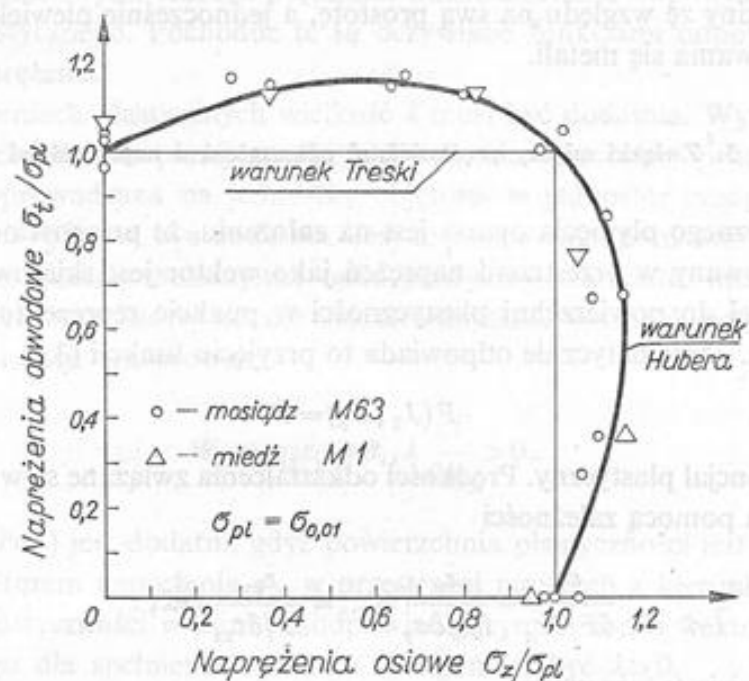
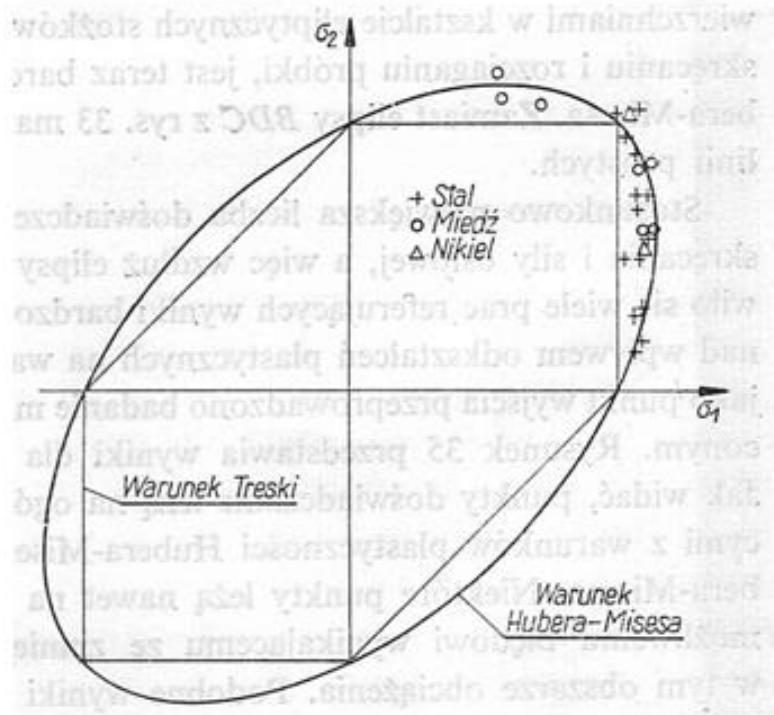
Hipoteza H-M



Hipoteza τ_{max}

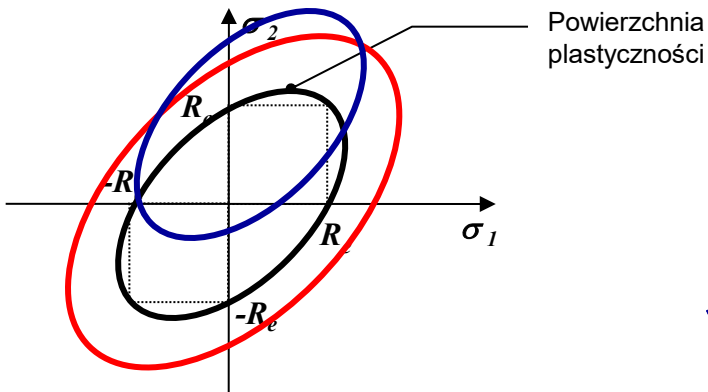
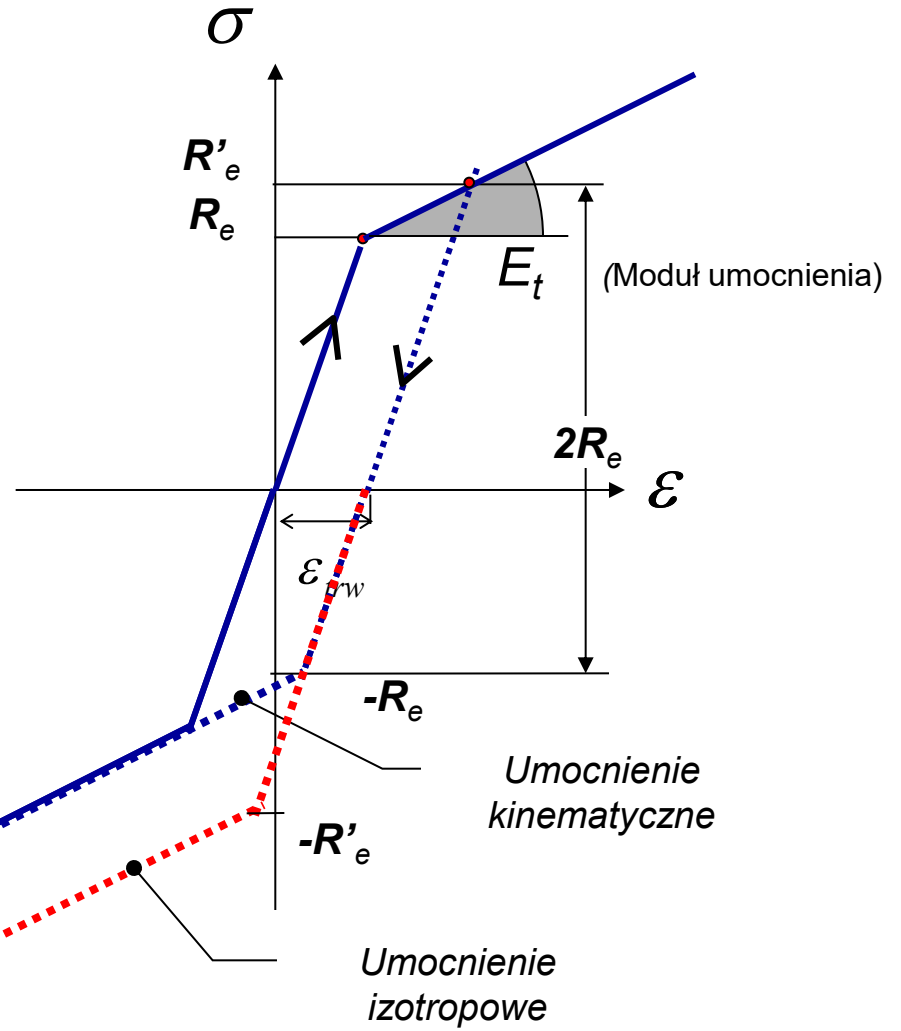
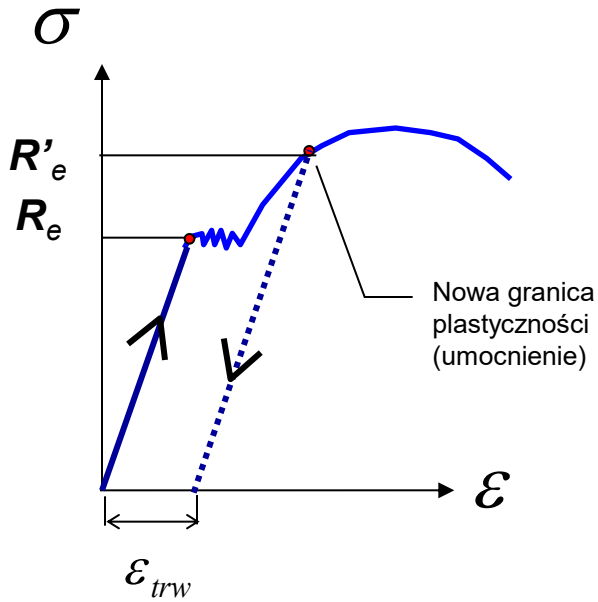


**Geometryczne odwzorowania warunku plastyczności dla płaskiego stanu naprężenia
w przestrzeni naprężeń σ_x , σ_y , τ_{xy} dla obu hipotez**

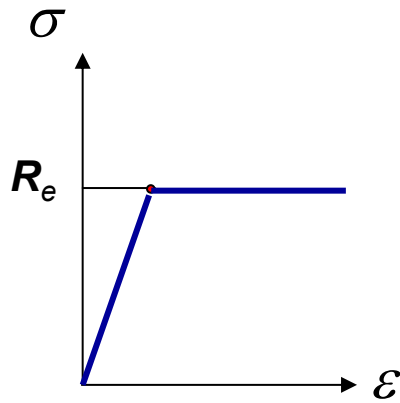


**Doświadczalna weryfikacja kryterium uplastycznienia wg hipotezy Hubera-Misesa i Treski (τ_{max})
w płaskim stanie naprężenia**

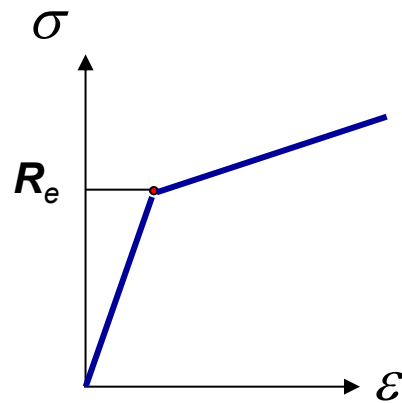
Umocnienie materiału



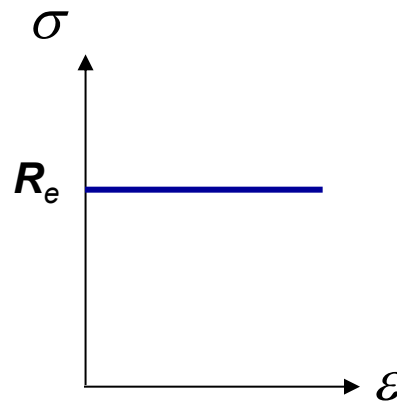
Modele materiału



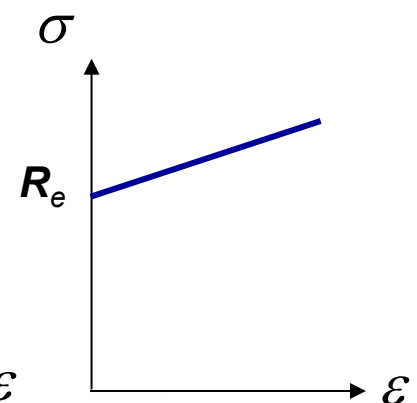
Sprężysto
idealnie plastyczny



Sprężysto
plastyczny
z umocnieniem



Sztywno
idealnie plastyczny



Sztywno
plastyczny
z umocnieniem

Ogólnie:

$$\varepsilon = f\left(\sigma, \frac{d\sigma}{dt}, t\right)$$

Reologia:

Pełzanie $\sigma = const$

Relaksacja $\varepsilon = const$

Współczynnik bezpieczeństwa

Ze względu na możliwe błędy (*obliczenia, wykonanie, eksploatacja*) dopuszczamy niższy poziom tzw. naprężenia dopuszczalnego:

$$k_r = \frac{R_e}{n_e}$$

$$k_r = \frac{R_m}{n_m}$$

n_e, n_m – współczynniki bezpieczeństwa

Zniszczenie konstrukcji:

- Uplastycznienie,
- Przekroczenie nośności granicznej (konstrukcja staje się mechanizmem)
- Pękanie, zmęczenie,
- Utrata stateczności.

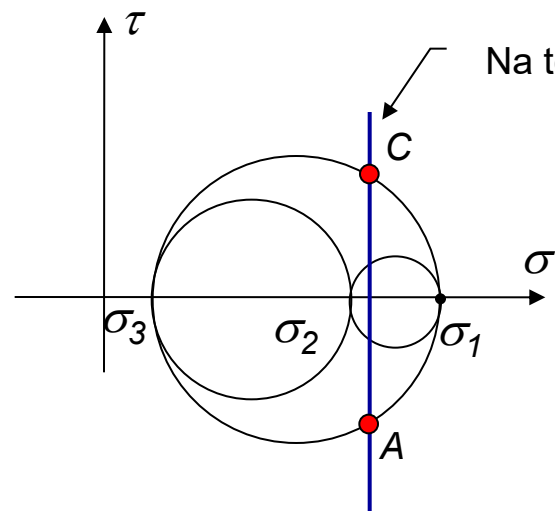
Jeśli w danym stanie naprężenia ma być spełniony warunek bezpieczeństwa, to:

$$\sigma_{red} \leq k_r$$

Zniszczenie materiału

Hipoteza Mohra

O zniszczeniu materiału decyduje wartość naprężeń w jednym szczególnym przekroju



O zniszczeniu decyduje tylko zewnętrzne koło Mohra !

